SEMIGRUPOS DE OPERADORES

Y SU APLICACION

UNA INTRODUCCION

Por:

Volker Stallbohm

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional – Medellín

TERCER SIMPOSIO COLOMBIANO DE
ANALISIS FUNCIONAL

Medellín, 25 al 29 de Noviembre / 85

Indice

1.1. Introducción.

En estas notas se estudiará la teoría básica de los semigrupos de operadores lineales acotados. La dirección de la presentación estará dirigida solo a un aspecto de la teoría de semigrupos; a la aplicación de estas ideas a ecuaciones diferenciales lineales en espacios de Banach. Solo podemos dar una indicación como esta teoría puede ser aplicada al estudio de ecuaciones diferenciales semilineales. Es bien conocido que una gran variedad de ecuaciones diferenciales parciales que describen procesos no estacionarios pueden ser escritas como ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach en las cuales intervienen operadores no acotados. Al lector interesado en estas aplicaciones lo remitimos a la bibliografía al final de estas notas, en particular a los libros [4], [5], [6], [10] donde se puede encontrar una abundante y reciente lista de trabajos. No se ha podido abordar la importante teoría de semigrupos no lineales, para los cuales remitimos a la excelente presentación en [3], para espacios de Hilbert, así como a [9] y [2]. En [14] se desarrolla la teoría de semigrupos coseno que permiten un tratamiento directo de ecuaciones como la ecuación de onda, sin tener que reducirla a un sistema de primer orden. En [7] se encuentra una presentación de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach sobre conjuntos cerrados. En total nos atenemos muy estrechamente en este tema ya clásico a [7] y particularmente a [4].

Como motivación del siguiente estudio de los semigrupos de operadores lineales acotados y su relación con ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach y en particular con ecuaciones diferenciales parciales consideremos, sin dar todos los detalles, la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \; 0 < x < \pi \, , \quad t > 0 \qquad (1.1)$$

$$u(0,t) = 0 \, , \quad u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0$$

y condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$, $0 < x < \pi$, una función dada. Si $u_0(x)$ es una función "suave" que se anula en 0 y en π podemos usar la técnica estándar de separación de variables. Buscamos soluciones no triviales de la forma

$$u(x,t) = v(x)\, T(t)$$

que nos lleva a considerar el par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$v'' + \lambda v = 0 \qquad y \qquad T'' + \lambda T = 0$$

con la condición de frontera $v(0) = v(\pi) = 0$. Este es un problema de frontera para $v(x)$ y las soluciones son

$$v_n(x) = \operatorname{sen}(nx) \qquad \text{con} \quad \lambda_n = n^2 \, , \quad n \in \mathbb{N}$$

Con eso las soluciones de la segunda ecuación son

$$T_n(t) = e^{-n^2 t} \qquad , \; n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0 .$$

Obtenemos el sistema contable $u_n(x,t) = e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ de funciones que satisfacen $u_n(x,0) = u_0(x)$ y $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$
La solución del problema inicial y de frontera dado, se obtiene entonces por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle u_n(\cdot,t), u_0 \rangle \operatorname{sen}(nx) \qquad (1.2)$$

$$u_0^{(n)} := \langle u_n(\cdot,t), u_0 \rangle := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx \quad , n\in\mathbb{N}$$

donde (1.2) tiene sentido para $u_0 \in L^2[0,\pi]$. Podemos definir la familia de operadores lineales y acotados

$$(S(t)u_0)(x) := u(x,t) \quad , \quad t \geq 0. \quad 0 \leq x \leq \pi .$$

Para la familia $S(t)$, $t\geq 0$ da un cálculo: para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}[S(t_2)\,S(t_1)\,u_0](x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_0^{(n)}\, e^{-n^2 t_1}\,\mathrm{sen}(nx)\, e^{-n^2 t_2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_0^{(n)}\,\mathrm{sen}(nx)\, e^{-n^2(t_1+t_2)} \\ &= [S(t_1+t_2)u_0](x)\end{aligned}$$

Obtenemos $S(t_1)\,S(t_2) = S(t_1+t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$ en $L^2[0,\pi]$, la llamada propiedad de semigrupo. Podemos obtener también $S(0) = I$ y que para $u_0 \in L^2[0,\pi]$, $S(t)u_0 \to u_0$ en $L^2[0,\pi]$, para $t\to 0+$. Calculando la norma $\|S(t)\|$ en $L^2[0,\pi]$ obtenemos $\|S(t)\| \leq e^{-t}$. Estas propiedades van a definir lo que se llamará un semigrupo de clase C_0 de contracciones.

Por otro lado consideramos el operador lineal A, definido por

$$(A\phi)(x) = -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) \quad , \quad 0<x<\pi ,$$

para funciones suficientemente suaves con $\phi(0)=0$, $\phi(\pi)=0$. Para tales funciones ϕ, ψ tenemos, integrando por partes:

$$\langle A\phi, \phi\rangle := -\int_0^\pi \phi''(x)\,\phi(x)\,dx = \int_0^\pi \phi'(x)^2\,dx \geq 0$$

y $$\langle A\phi, \psi\rangle = -\int_0^\pi \phi''(x)\,\psi(x)\,dx = \langle \phi, A\psi\rangle$$

y por lo tanto podemos considerar a A extendido a un operador autoadjunto con dominio denso en $L^2[0,\pi]$ con

$$D(A) = \{\phi \mid \phi \in L^2[0,\pi],\ A\phi \in L^2[0,\pi]\} = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$$

con el espectro $\sigma(A) = \{\lambda_n \mid \lambda_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$ y vectores propios

$$\phi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se puede mostrar ahora que $S(t)u_0$, $t \geq 0$ es solución de

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0 \qquad (1.2)$$
$$u(0) = u_0$$

en $L^2[0,\pi]$, con $u_0 \in L^2[0,\pi]$ y A determina en forma única el semigrupo $S(t)$: $S(t)x = u(t)$, $u(t)$ solución de (1.2) con $x =: u_0$, $x \in L^2[0,\pi]$. Por lo tanto la solución del problema de Cauchy (1.2) en $L^2[0,\pi]$ nos da, si u_0 es suficientemente suave una solución clásica de (1.1). En general llamaremos una solución de (1.2) una solución de semigrupo para (1.1) y por un análisis de "regularidad" se debe determinar si $u(t) \in L^2[0,\pi]$ tie un representante tal que $u(x,t) := u(t)(x)$ satisfaga (1.1) en el sentido clásico o distribucional

Indiquemos finalmente como el semigrupo $S(t)$ lleva a una representación de la solución del problema no lineal

$$u_t = u_{xx} + f(t,x) \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , t > 0 \qquad (1.3)$$

con la condicion inicial y los valores de frontera anteriores. Supongamos para $t>0$ $f(t,\cdot) \in L^2[0,\pi]$ y con eso

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen}(nx) \quad , \quad f_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t,\xi)\operatorname{sen}(n\xi)\,d\xi \qquad (1.4)$$

Buscamos solución de la forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen}(nx)$ y encontramos, usando (1.3) y el valor inicial u_0, para los coeficientes $u_n(t)$:

$$u_n'(t) + n^2 u_n(t) = f_n(t) \quad , \quad t \geq 0$$

$$u_n(0) = u_0^{(n)} \quad , \quad n \geq 1$$

Obtenemos: $\quad u_n(t) = u_0^{(n)} e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau$

y para la solución

$$u(x,t) = (S(t)u_0)(x) + \int_0^t \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(t-\tau)} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(n\xi)\right] f(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi$$

y con (1.4) obtenemos la representación:

$$u(\cdot,t) = (S(t)u_0)(\cdot) + \int_0^t S(t-\tau) f(\tau,\cdot)\,d\tau \qquad (1.5)$$

para el problema inicial y de frontera para (1.3).
Veremos como (1.5) se usará para probar existencia y unicidad de un problema como (1.3).

1.2. Semigrupos de Operadores Lineales de clase C_0.

Def. 2.1: Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una familia $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineales acotados de X en X se llama un semigrupo (lineal) de clase C_0 si

(i) $T(0) = I$

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall\ t, s \geq 0$

(iii) $t \mapsto T(t)x$ es continua de $[0,\infty)$ a X, $\forall x \in X$.

Veamos que todo semigrupo de clase C_0 es exponencialmente acotado

Teorema 2.2: Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0. Entonces, existe una constante $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad , \forall\ 0 \leq t < \infty \qquad (2.1)$$

Dem: Por propiedad (iii), tenemos que, dado $x \in X$, el conjunto $\{ \|T(t)x\| \mid t \in [0,1] \}$ es acotado. Por el Teorema de acotamiento uniforme (Banach-Steinhaus) existe $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0,1]$. Sea $\omega := \ln M$ y $t \in (0,\infty)$. Para $n \in \mathbb{N}$, tal que $t \in (n-1, n]$ se tiene $t/n \in [0,1]$ y por la propiedad de semigrupo (ii) obtenemos lo deseado:

$$\|T(t)\| = \|T^n(\tfrac{t}{n})\| \leq \|T(\tfrac{t}{n})\|^n \leq M^n \leq M^{t+1} = M e^{\omega t}$$

Def. 2.3: Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0. El operador definido por

$$D(A) := \left\{ x \mid x \in X \text{ y } \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

y

$$Ax := \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{para } x \in D(A)$$

se llama el generador infinitesimal del semigrupo $T(t)$. $D(A)$ es el dominio de A.

Teorema 2.4: Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Se tiene

(a) $\forall x \in X$:

$$T(t)x = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds \quad , t \geq 0. \tag{2.2}$$

(b) $\forall x \in X, t \geq 0$:

$$T(t)x - x = A\left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) \tag{2.3}$$

(c) $\forall x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$: $T(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt} T(t)x = A\,T(t)x = T(t)Ax \tag{2.4}$$

(d) $\forall x \in D(A)$, $\forall t, s \geq 0$:

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t A\,T(\tau)x \, d\tau \tag{2.5}$$

Dem: (a) es consecuencia inmediata (Integral de Riemann) de la continuidad de $t \mapsto T(t)x$. (b): Sea $x \in X$ y $h > 0$. Tenemos

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \xrightarrow[h\to 0]{} T(t)Ax \tag{2.6}$$

y con eso $T(t)x \in D(A)$ así como $A\,T(t)x = T(t)Ax$. Además obtenemos de (2.6) con la propiedad de semigrupo, para la derivada de la derecha $\frac{d^+}{dt} T(t)x$:

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = A\,T(t)x = T(t)Ax \quad , t \geq 0.$$

(c): Con lo anterior basta demostrar que para $t>0$ la derivada de la izquierda de $T(t)x$ existe y es igual a $T(t)Ax$:

$$\lim_{h\to 0+}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right] = \lim_{h\to 0+} T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right] +$$

$$+ \lim_{h\to 0+}\left[T(t-h)Ax - T(t)Ax\right]$$

y como los dos terminos a la derecha tienden a 0, el primero debido a $x\in D(A)$ y $\|T(t-h)\| \leq K$ para $0\leq h\leq t$ y el segundo por propiedad (iii) del semigrupo. (d) se obtiene por integración.

Con Teorema 2.4 obtenemos para el generador infinitesimal

Teorema 2.5: Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0. A con dominio $D(A)$ su generador infinitesimal. Se tiene:
(a) $D(A)$ es un subespacio lineal de X, A un operador lineal
(b) $D(A)$ es denso en X y A un operador cerrado.

Dem: (a) Es obvio del hecho que $T(t)$ es un operador lineal para $t\geq 0$ y la definición de A. (b): Para $x\in X$ y $t>0$ ponemos $x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds$. Con (2.3) tenemos $x_t\in D(A)$ y con (2.2) obtenemos $x_t \to x$ para $t\to 0$ y con eso $\overline{D(A)} = X$. Sea ahora $x_n\in D(A)$ con $x_n\to x$, $Ax_n\to y$ para $n\to\infty$. Con (2.5) tenemos:
$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds \qquad (2.7)$$

y como $T(s)Ax_n$ converge uniformemente sobre acotados en $[0,\infty)$ tenemos para $n\to\infty$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\, ds \qquad (2.8)$$

dividiendo por $t>0$ y usando (2.2) obtenemos con la definición de A: $x \in D(A)$ y $Ax = y$, de manera que A es cerrado.

<u>Observación 2.6</u>: Parte (c) del Teorema 2.4, muestra, que para $x \in D(A)$ la "ecuación diferencial" $u' = Au$, $u(0) = x$, donde A es el generador infinitesimal de un semigrupo $T(t)$ de clase C_0, tiene una solución continuamente diferenciable en $[0,\infty)$: $u(t) := T(t)x$, $u'(t) = A\,u(t)$, $t \geq 0$. Veamos que $u(t) = T(t)x$ es única: sea $v : [0,\infty) \to D(A) \subseteq X$ diferenciable con $v'(t) = A\,v(t)$, $v(0) = x$, $t \geq 0$. Sea $t > 0$ y $s \mapsto T(t-s)\,v(s)$ para $[0,t]$. Tenemos ("regla del producto") que esa función es diferenciable en $(0,t)$ y se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} T(t-s)\,v(s) &= T(t-s)\,v'(s) + \left[\frac{d}{ds} T(t-s)\right] v(s) = \\ &= T(t-s)\,A\,v(s) - A\,T(t-s)\,v(s) = \\ &= T(t-s)\,A\,v(s) - T(t-s)\,A\,v(s) = 0\end{aligned}$$

y con eso $s \mapsto T(t-s)\,v(s)$ es constante y por lo tanto los valores en $s=0$ y $s=t$ coinciden: $T(t)\,v(0) = v(t)$

Una consecuencia inmediata es, que la aplicación $T(t) \mapsto A$, A generador infinitesimal de $T(t)$, de los semigrupos de clase C_0 al espacio de los operadores cerrados con dominio denso en X es injectiva. Tenemos:

<u>Teorema 2.6</u>: Sean $T(t)$, $S(t)$ semigrupos de clase C_0 con generadores infinitesimales respectivos A y B.

Si $A = B$ entonces $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$

Dem: Para $x \in D(A) = D(B)$ se tiene con (c) del Teorema 2.4 y la observación 2.6 : $T(t)x = S(t)x$, $t \geq 0$. Como $\overline{D(A)} = X$ y $T(t)$, $S(t)$ son operadores acotados para $t \geq 0$, coinciden también en X.

Un generalización del Teorema 2.5 se tiene para las potencias A^n del generador infinitesimal de $T(t)$.

Teorema 2.6: $T(t)$ semigrupo de clase C_0, A generador infinitesimal de $T(t)$. Se tiene para $n \in \mathbb{N}$.

(a) $D(A^n)$, el dominio de A^n, es un espacio lineal $\subseteq X$ y A^n es un operador lineal.

(b) $\forall\, x \in D(A^n)$, $\forall\, t \geq 0$ se tiene $T(t)x \in D(A^n)$ y

$$\frac{d^n}{dt^n} T(t)x = A^n T(t)x = T(t)A^n x$$

$$T(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} T(s) A^n x \, ds$$

(c) $\bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k)$ es denso en X y A^n es cerrado.

Dem: [1].

1.3 El Teorema de Hille - Yosida.

Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0. Teorema 2.2. muestra, que existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, $t \geq 0$. Si $\omega = 0$ el semigrupo se llama uniformemente acotado y si además $M=1$ se llama un semigrupo C_0 de contracciones: $\|T(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$. Trataremos el problema de caracterizar aquellos operadores lineales, necesariamente de dominio denso en X y cerrados, que son generadores infinitesimales de un semigrupo de clase C_0. El siguiente Teorema de <u>Hille-Yosida</u> da condiciones necesarias y suficientes, en términos de la resolvente de ~~de~~ un operador A, para que este sea generador de un semigrupo C_0 de contracciones.

<u>Recordemos</u>: Si X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $A : D(A) \subseteq X \to X$ es un operador lineal el <u>conjunto resolvente</u> $\rho(A) \subseteq \mathbb{K}$ esta dado por aquellos $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda I - A$ es invertible y $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado de X en X. Para $\lambda \in \rho(A)$ ponemos $R(\lambda; A) := (\lambda I - A)^{-1}$ y $R(\cdot; A)$ se llama <u>la resolvente de A</u>. $\sigma(A) := \mathbb{K} \setminus \rho(A)$ se llama el conjunto espectral de A.

<u>Teorema 3.1</u>: Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \to X$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones $T(t)$, $t \geq 0$ si y solo si

(i) A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$

(ii) El conjunto resolvente de A contiene $(0, \infty)$ y

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad , \forall \lambda > 0 \tag{3.1}$$

<u>Dem</u>: (a) $\Rightarrow$: (i) es consecuencia de Teorema 2.5. Para $\lambda > 0$ y $x \in X$ ponemos

$$R(\lambda) x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x \, dx \tag{3.2}$$